Оглавление

От авторов **11**

Предисловие **13**

Список обозначений **21**

Часть I

Алгебры Клиффорда и смежные структуры . . . **25**

Глава 1. Алгебра матриц Дирака **29**

1.1. γ-матрицы Дирака 29

1.2. Связь γ-матриц с псевдоунитарной группой 34

Глава 2. Алгебра Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ **39**

2.1. Алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ и $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 39

2.2. Структуры, связанные с элементами алгебры Клиффорда 41

2.3. Внешнее умножение элементов алгебры Клиффорда . . 44

2.4. Эрмитово сопряжение и скалярное произведение в $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 46

2.5. Другие операции сопряжения 49

2.6. Эрмитовы идемпотенты и идеалы 52

2.7. Матричные представления алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 55

2.8. Другие матричные представления алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ . . . 58

2.9. Вторичные порождающие алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 61

2.10. Простейшие операции над элементами алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 62

Глава 3. Алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ и $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}$ **69**

3.1. Определение алгебр Клиффорда с фиксированным базисом 69

3.2. О комплексифицированных и комплексных алгебрах Клиффорда 71

3.3. Примеры алгебр Клиффорда малых размерностей . . . 73
3.4. Другие определения алгебр Клиффорда 75
3.5. Классификации элементов алгебр Клиффорда по рангам, четности и кватернионным типам 77
3.6. Операторы сопряжения 79
3.7. Структура унитарного (или евклидова) пространства на алгебре Клиффорда 83

Глава 4. Матричные представления алгебр Клиффорда 91

4.1. Матричные представления алгебр Клиффорда, примеры 92
4.2. Эрмитовы идемпотенты, левые идеалы и смежные структуры 95
4.3. Нормальные представления алгебр Клиффорда в виде комплексных матриц 99
4.4. Примеры матричных представлений алгебр Клиффорда 106
4.5. Рекуррентный метод построения матричного представления комплексифицированных алгебр Клиффорда 109
4.6. Периодичность Картана—Ботта и матричные представления вещественных алгебр Клиффорда 111
4.7. Внешняя сигнатура алгебр Клиффорда 116
4.8. Рекуррентный метод построения матричного представления вещественных алгебр Клиффорда . . . 119

Часть II
Метод кватернионной типизации 123

Глава 5. Коммутаторы и антикоммутаторы в алгебрах Клиффорда 127

5.1. Центр алгебр Клиффорда 127
5.2. Формулы для коммутаторов и антикоммутаторов от элементов алгебры Клиффорда фиксированных рангов 130
5.3. Некоторые частные случаи формул для коммутаторов и антикоммутаторов 133
5.4. Определения подпространств фиксированных рангов алгебры Клиффорда 142
5.5. Решение коммутаторных уравнений 143

Глава 6. Кватернионная типизация алгебр Клиффорда . . . 153
6.1. Алгебры кватернионного типа . . . 153
6.2. Основы кватернионной типизации элементов алгебры Клиффорда . . . 158
6.3. Кватернионная типизация алгебр Клиффорда в бескоординатной форме . . . 166
6.4. Размерности подпространств кватернионных типов . . . 169
Глава 7. Развитие метода кватернионной типизации . . . 173
7.1. Подалгебры в виде подпространств из элементов фиксированных кватернионных типов . . . 173
7.2. Классификация подалгебр алгебры Ли псевдоунитарной группы алгебры Клиффорда . . . 176
7.3. Тройные коммутаторы и антикоммутаторы в алгебрах Клиффорда . . . 181
7.4. Развитие метода кватернионной типизации с помощью k-мерных коммутаторов и антикоммутаторов . . . 184
7.5. Сопряжения и метод кватернионной типизации . . . 189
Глава 8. Алгебры Грассмана и кватернионные типы . . . 199
8.1. Определение алгебры Грассмана . . . 199
8.2. Классификации элементов алгебр Грассмана по рангам, четности и кватернионным типам . . . 200
8.3. Формулы для коммутаторов и антикоммутаторов от элементов алгебры Грассмана . . . 202
8.4. Внешнее умножение элементов алгебр Клиффорда . . . 203
8.5. Клиффордово умножение элементов алгебры Грассмана . . . 205
8.6. Алгебра Грассмана как алгебра кватернионного типа . . . 206
8.7. k-мерные коммутаторы и антикоммутаторы в алгебре Грассмана . . . 207

Часть III
Метод усреднения в алгебрах Клиффорда и обобщенная теорема Паули . . . 213

Глава 9. Свертки по наборам элементов базиса алгебры Клиффорда . . . 217
9.1. Теорема о свертке порождающих . . . 219
9.2. Теорема о свертке элементов базиса фиксированного ранга . . . 222
9.3. Частные случаи теоремы о свертке . . . 224

9.4. Полные свертки 225
9.5. Свертки по четным или нечетным элементам базиса . . 228
9.6. Свертки по сопряженным наборам элементов базиса . . 229
9.7. Свертки по элементам базиса фиксированного кватернионного типа 233

Глава 10. Обобщенные свертки в алгебрах Клиффорда 241

10.1. Теоремы о коммутировании элементов базиса алгебры Клиффорда 241
10.2. Второй базис в алгебрах Клиффорда 247
10.3. Обобщенные свертки 257
10.4. Обобщенные свертки по четным и нечетным индексам 264
10.5. Обобщенные свертки по сопряженным наборам мультииндексов в нечетной алгебре Клиффорда 266

Глава 11. Теорема Паули и ее обобщения на случай алгебр Клиффорда 275

11.1. Теорема Паули в случае $n = 4$ 276
11.2. Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с четным n в общей постановке 277
11.3. Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с четным n для нечетных элементов 282
11.4. Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с нечетным n для нечетных элементов 285
11.5. Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с нечетным n в общей постановке 290
11.6. Локальная обобщенная теорема Паули 301

Глава 12. Связь обобщенной теоремы Паули с теорией представлений 309

12.1. Основы теории представлений, лемма Шура 309
12.2. Метод усреднения в теории представлений конечных групп 312
12.3. Неприводимые представления алгебр Клиффорда 317
12.4. Алгебраический взгляд на классификацию алгебр Клиффорда 320
12.5. Обобщенная теорема Паули в терминах матриц 323
12.6. Операция взятия следа от элемента алгебры Клиффорда 328
12.7. Определитель от элемента комплексифицированной алгебры Клиффорда 332

Часть IV
Группы Ли и алгебры Ли в алгебрах Клиффорда 339

Глава 13. Ортогональные группы 343

13.1. Псевдоортогональная и специальная псевдоортогональная группа 343

13.2. Некоторые соотношения для элементов псевдоортогональной группы 346

13.3. Ортохронная, ортохорная и специальная ортохронная группы 351

13.4. Ортогональные группы и алгебры Клиффорда 354

13.5. Структура ортогональных групп 359

Глава 14. Спинорные группы и их связь с ортогональными 367

14.1. Группа обратимых элементов алгебры Клиффорда, присоединенные действия 367

14.2. Применение обобщенной теоремы Паули при изучении группы Липшица и группы Клиффорда 370

14.3. Спинорные группы как нормализованные подгруппы группы Липшица 374

14.4. Теоремы о норме элементов спинорных групп 378

14.5. Сюръективные отображения спинорных групп на ортогональные 383

14.6. Вычисление элементов спинорных групп по элементам ортогональных групп 389

Глава 15. Дальнейшее исследование спинорных групп . 393

15.1. Отражения относительно гиперплоскостей и теорема Картана—Дьедонне 393

15.2. Другой подход к исследованию группы Липшица 395

15.3. Явный вид элементов группы Клиффорда, группы Липшица и спинорных групп 398

15.4. Случай евклидовых сигнатур 400

15.5. Структура спинорных групп 403

15.6. Спинорные группы в случае малых размерностей 408

Глава 16. Спинорные группы как группы Ли 417
16.1. Алгебры Ли спинорных групп 417
16.2. Двулистные накрытия ортогональных групп спинорными, связность и односвязность спинорных групп 419
16.3. Экспонента от элементов второго ранга алгебры $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ . . 422
16.4. Внешние экспоненты от элементов алгебры Клиффорда 425
16.5. Внешняя экспонента от элементов второго ранга алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 427
16.6. Множество $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\mathrm{EOO}}$ и амплитуда 433
Глава 17. Унитарные и псевдоунитарные группы Ли в алгебрах Клиффорда 441
17.1. Унитарные группы алгебры Клиффорда 441
17.2. Псевдоунитарные группы алгебры Клиффорда 443
17.3. Симплектическая подгруппа псевдоунитарной группы $\mathrm{W}\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\mathbb{C}}$ 445
17.4. Унитарные подгруппы псевдоунитарных, симплектических и спинорных групп алгебры Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ 448
17.5. Алгебры Ли унитарных подгрупп псевдоунитарных групп алгебры Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,n-1}$ 453
Глава 18. Спиноры 461
18.1. Спиноры Дирака и Вейля в формализме алгебр Клиффорда 461
18.2. Согласованность матричных операций и операций в алгебрах Клиффорда 463
18.3. Дополнительные сигнатуры алгебр Клиффорда 465
18.4. Обобщение дираковского сопряжения 468
18.5. Обобщение майорановского сопряжения и теорема о дополнительной сигнатуре алгебры Клиффорда 469
18.6. Обобщение зарядового сопряжения, спиноры Майорана и Майорана—Вейля в формализме алгебр Клиффорда 474
Приложения 479
Глава 19. Некоторые основные алгебраические понятия 483
19.1. Элементы теории множеств 483
19.2. Отображения 484

19.3. Группы 486
19.4. Кольца, тела, поля 488
19.5. Модули, векторные пространства 489
19.6. Билинейные и квадратичные функции на векторном пространстве 490
19.7. Алгебры 491
Глава 20. Некоторые геометрические понятия 495
20.1. Евклидово пространство 495
20.2. Псевдоевклидово, унитарное и симплектическое пространства 497
20.3. Метрическое пространство 499
20.4. Топологическое пространство, многообразие 499
20.5. Линейная связность, фундаментальная группа, односвязность 501
20.6. Накрытия 502
20.7. Группы Ли и алгебры Ли 503
20.8. Классические матричные группы 504
Глава 21. Некоторые обобщения алгебр Клиффорда . . 513
21.1. Обобщенные алгебры Клиффорда третьего и высших порядков 514
21.2. Демонстрационное представление и тензорные произведения алгебр Клиффорда 516
21.3. Классификация расширенных алгебр Клиффорда 528
21.4. Внешние полиметрические алгебры 534
Литература 543
Предметный указатель 549