

# Оглавление

Предисловие научного редактора . . . . .	9
Предисловие автора . . . . .	10
ГЛАВА 1. Введение . . . . .	15
1.1. Список основных обозначений . . . . .	15
1.1.1. Константы, векторы и матрицы . . . . .	15
1.1.2. Дифференцирования и дифференциальные операторы . . . . .	15
1.1.3. Дифференциальная алгебра . . . . .	16
1.1.4. Алгебра . . . . .	17
1.2. Пары Лакса . . . . .	18
1.2.1. Случай ОДУ . . . . .	18
1.2.2. Пары Лакса для эволюционных уравнений в частных производных . . . . .	20
1.2.3. Матричная задача Римана–Гильберта и процедура одевания . . . . .	21
1.3. Гамильтоновы структуры . . . . .	22
1.4. Инфинитезимальные симметрии . . . . .	26
1.4.1. Наивный симметричный тест . . . . .	29
1.5. Первые интегралы и локальные законы сохранения . . . . .	31
1.6. Преобразования . . . . .	33
1.6.1. Точечные и контактные преобразования . . . . .	33
1.6.2. Дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры . . . . .	37

## Часть I. Представления Лакса для интегрируемых систем

ГЛАВА 2. Пары Лакса и факторизация алгебр Ли . . . . .	45
2.0.1. Определения симметрий и законов сохранения . . . . .	45
2.1. Скалярные пары Лакса для эволюционных уравнений . . . . .	47

2.1.1.	Псевдодифференциальные ряды . . . . .	47
2.1.2.	Иерархия Кортвега – де Фриза . . . . .	50
2.1.3.	Иерархия Гельфанда – Дикого и ее обобщения . . . . .	59
2.2.	Матричные пары Лакса . . . . .	63
2.2.1.	Иерархия НУШ . . . . .	63
2.2.2.	Обобщения . . . . .	67
2.3.	Разложения алгебр петель и пары Лакса . . . . .	70
2.3.1.	Факторизующие подалгебры для $\mathcal{G} = \mathfrak{so}_3$ . . . . .	75
2.3.2.	Интегрируемые системы типа волчков . . . . .	80
2.3.3.	Классические $\mathfrak{so}_3$ -волчки . . . . .	81
2.3.4.	Обобщения волчков Эйлера и Стеклова – Ляпунова на случай $\mathfrak{so}_n$ . . . . .	85
2.3.5.	Факторизующие подалгебры для алгебр Каца – Муди . . . . .	86
2.3.6.	Интегрируемые системы типа уравнения Ландау – Лифшица . . . . .	88
2.3.7.	Интегрируемые гиперболические модели типа урав- нения кирального поля . . . . .	91
2.4.	Конечномерный метод факторизации, редукции и неассоци- ативные алгебры . . . . .	92
2.4.1.	Метод факторизации . . . . .	92
2.4.2.	Редукции . . . . .	94
2.4.3.	Обобщенный метод факторизации . . . . .	98

## Часть II. Алгебраические структуры в бигамильтоновом формализме

ГЛАВА 3.	<b>Бигамильтонов формализм</b> . . . . .	103
3.0.1.	Метод сдвига аргумента . . . . .	104
3.0.2.	Бигамильтонова форма уравнения КдФ . . . . .	106
3.1.	Бигамильтонов формализм и пары согласованных алгебр . . . . .	107
3.1.1.	Согласованные алгебры Ли. Примеры и приложения . . . . .	110
3.1.2.	Согласованные скобки Ли, связанные с $\theta$ -функциями . . . . .	115
3.1.3.	Ассоциативные алгебры, согласованные с $\text{Mat}_m$ . . . . .	119
3.2.	Полиномиальные формы эллиптических систем Калоджеро – Мозера . . . . .	132
3.2.1.	Гамильтонианы Калоджеро – Мозера . . . . .	132
3.2.2.	Квазиточно решаемые дифференциальные операторы . . . . .	135

- 3.2.3. Коммутативные подалгебры в  $U(\mathfrak{gl}_{N+1})$  и квантовые гамильтонианы Калоджеро – Мозера . . . . . 140
- 3.2.4. Бигамильтонова природа классической эллиптической модели Калоджеро – Мозера . . . . . 143

### Часть III. Симметричный подход к интегрируемости

- ГЛАВА 4. Основные понятия симметричного подхода . . . . . 151
- 4.1. Описание некоторых классификационных результатов . . . . . 151
- 4.1.1. Гиперболические уравнения . . . . . 151
- 4.1.2. Эволюционные уравнения . . . . . 152
- 4.1.3. Системы двух уравнений . . . . . 158
- 4.2. Необходимые условия интегрируемости . . . . . 161
- 4.2.1. Эволюционные векторные поля, рекурсионный оператор и вариационная производная . . . . . 161
- 4.2.2. Формальные симметрии . . . . . 163
- 4.2.3. Законы сохранения . . . . . 166
- 4.2.4. Формальный симплектический оператор . . . . . 167
- 4.2.5. Канонические плотности и условия интегрируемости . 170
- 4.2.6. Инвариантность условий интегрируемости относительно замен переменных . . . . . 174
- 4.2.7. Классификация интегрируемых уравнений типа уравнения КдФ . . . . . 177
- 4.2.8. Интегрируемые уравнения типа уравнения Гарри – Дима 179
- 4.2.9. Нелокальные переменные, эволюционные уравнения со связями и обращение дифференциальных подстановок . . . . . 181
- 4.3. Рекурсионные и гамильтоновы слабонелокальные операторы 188
- 4.3.1. Слабонелокальные рекурсионные операторы . . . . . 189
- 4.3.2. Слабонелокальные гамильтоновы операторы . . . . . 193
- 4.3.3. Рекурсионные операторы для уравнения Кричевера – Новикова . . . . . 194
- 4.3.4. Слабонелокальные гамильтоновы операторы для уравнения Кричевера – Новикова . . . . . 197
- 4.4. Интегрируемые неэволюционные уравнения . . . . . 199
- 4.4.1. Формальная симметрия и симплектический оператор . 200
- 4.4.2. Примеры . . . . . 202

4.4.3. Условия интегрируемости . . . . .	204
4.4.4. Слабонелокальные рекурсионные операторы . . . . .	207
4.4.5. Обсуждение . . . . .	209
<b>ГЛАВА 5. Интегрируемые гиперболические уравнения лиувилле-</b>	
<b>ского типа . . . . .</b>	<b>211</b>
5.1. Обобщенные $x$ - и $y$ -интегралы . . . . .	212
5.2. Инварианты Лапласа для линейного гиперболического опе-	
ратора . . . . .	215
5.3. Нелинейные гиперболические уравнения лиувиллевого типа	218
5.4. Дифференциальные подстановки и уравнения лиувиллевого	
типа . . . . .	222
5.4.1. Дифференциальные подстановки первого порядка . . .	225
5.5. Предгамильтоновы операторы . . . . .	226
5.5.1. Примеры предгамильтоновых операторов, связанных	
с уравнениями лиувиллевого типа . . . . .	228
5.6. Интегрируемые многокомпонентные гиперболические си-	
стемы лиувиллевого типа . . . . .	234
<b>ГЛАВА 6. Интегрируемые неабелевы уравнения . . . . .</b>	<b>241</b>
6.1. ОДУ на свободных ассоциативных алгебрах . . . . .	241
6.1.1. Уравнения с матричными неизвестными . . . . .	241
6.1.2. Системы дифференциальных уравнений на свобод-	
ной ассоциативной алгебре . . . . .	246
6.1.3. Квадратичные однородные неабелевы системы . . . . .	248
6.1.4. Двухкомпонентные неабелевы системы . . . . .	249
6.1.5. Интегрируемые скалярные квадратичные однородные	
системы . . . . .	255
6.1.6. Неабелизация интегрируемых однородных скалярных	
систем . . . . .	261
6.1.7. Интегрируемые неоднородные неабелевы системы . .	266
6.2. Неабелев гамильтонов формализм и скобки Пуассона на сле-	
дах матриц . . . . .	270
6.2.1. Скобки Пуассона на следах . . . . .	270
6.2.2. Неабелевы скобки Пуассона на свободных ассоциа-	
тивных алгебрах . . . . .	278
6.2.3. Двойные скобки Пуассона на свободных ассоциатив-	
ных алгебрах . . . . .	285

6.3.	Эволюционные уравнения на свободных ассоциативных алгебрах . . . . .	287
6.3.1.	Матричные интегрируемые уравнения . . . . .	287
6.3.2.	Неабелевы эволюционные уравнения . . . . .	290
<b>ГЛАВА 7.</b>	<b>Интегрируемые системы и неассоциативные алгебры .</b>	<b>294</b>
7.1.	Определения алгебраических структур . . . . .	294
7.1.1.	Левосимметрические алгебры . . . . .	295
7.1.2.	Йордановы алгебры . . . . .	295
7.1.3.	Тройные йордановы системы . . . . .	296
7.2.	Йордановы системы КдФ . . . . .	297
7.3.	Левосимметрические алгебры и системы типа уравнения Бюргерса . . . . .	301
7.4.	Интегрируемые уравнения, связанные с тройными йордановыми системами . . . . .	302
7.4.1.	Системы типа уравнения мКдФ . . . . .	303
7.4.2.	Системы типа уравнения НУШ . . . . .	307
7.4.3.	Системы типа НУШ с производной . . . . .	308
7.5.	Интегрируемые системы, соответствующие новым алгебраическим структурам . . . . .	309
7.5.1.	Уравнения типа пропотенцированного мКдФ . . . . .	309
7.5.2.	Уравнения типа системы Олвера – Соколова . . . . .	310
7.5.3.	Системы типа уравнения мКдФ с двумя алгебраическими операциями . . . . .	311
7.6.	Рациональные интегрируемые системы . . . . .	313
7.6.1.	Обратный элемент как решение системы дифференциальных уравнений . . . . .	313
7.6.2.	Несколько классов интегрируемых рациональных йордановых моделей . . . . .	315
7.7.	Деформации неассоциативных алгебр и интегрируемые системы геометрического типа . . . . .	318
7.7.1.	Геометрическое описание деформаций . . . . .	318
7.7.2.	Алгебраическое описание деформаций . . . . .	319
7.7.3.	Эволюционные уравнения геометрического типа . . . . .	320
<b>ГЛАВА 8.</b>	<b>Интегрируемые векторные эволюционные уравнения .</b>	<b>325</b>
8.1.	Интегрируемые полиномиальные векторные системы . . . . .	325

8.2. Симметричный подход к классификации интегрируемых векторных уравнений . . . . .	327
8.2.1. Канонические плотности . . . . .	329
8.2.2. Оператор Эйлера и производная Фреше . . . . .	330
8.2.3. Векторные изотропные уравнения типа уравнения КдФ . . . . .	332
8.2.4. Векторные уравнения геометрического типа . . . . .	335
8.2.5. Векторные автопреобразования Бэклунда . . . . .	337
8.2.6. Интегрируемые уравнения на сфере . . . . .	338
8.2.7. Уравнения с двумя скалярными произведениями . . . . .	339
8.2.8. Анизотропные уравнения с постоянным вектором . . . . .	341
<b>ГЛАВА 9. Дополнения . . . . .</b>	<b>343</b>
Дополнение 1. Гиперболические уравнения с интегрируемыми симметриями третьего порядка . . . . .	343
Дополнение 2. Скалярные гиперболические уравнения лиувиллевого типа . . . . .	344
Дополнение 3. Интегрируемые эволюционные уравнения . . . . .	346
9.3.1. Допустимые точечные преобразования . . . . .	346
9.3.2. Уравнения третьего порядка . . . . .	347
9.3.3. Уравнения пятого порядка . . . . .	348
Дополнение 4. Квазилинейные системы из двух уравнений второго порядка . . . . .	351
<b>Литература . . . . .</b>	<b>353</b>